CFD pro tepelnou techniku I
přednáška

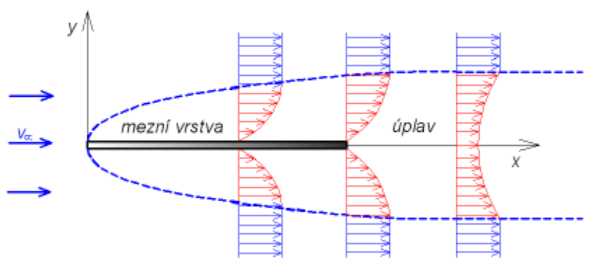
Turbulentní proudění

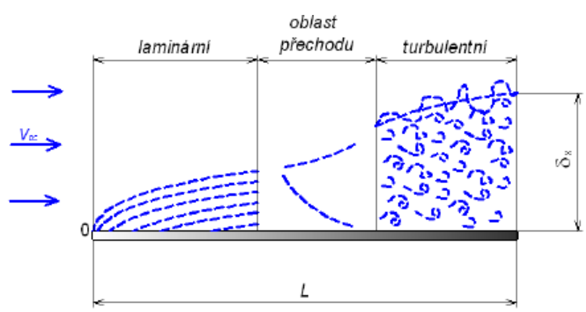
Pavel Zácha

zdroj: [Kozubková, 2008], [Fluent, 2011]

Proudění skutečných kapalin

- klasifikujeme 2 základní druhy proudění:
    - laminární
    - turbulentní
- turbulentní proudění tvoří 2 vrstvy:
    - turbulentní mezní vrstva (zabrzděná tekutina)
        - laminární podvrstva (desetiny mm)
        - přechodová vrstva
    - turbulentní jádro





mezní vrstvy při obtékání desky

Proudění skutečných kapalin

U 1D proudění v potrubí je přechod k turbulenci dán experimentálně určeným kritickým *Re*:

$$\mathrm{Re} = \frac{v_s \cdot d}{\nu}$$

v_s – střední rychlost; d – průměr v normálovém směru proudění; ν – kinematická viskozita

pro potrubí kruhového průřezu je Re_{krit} = 2320

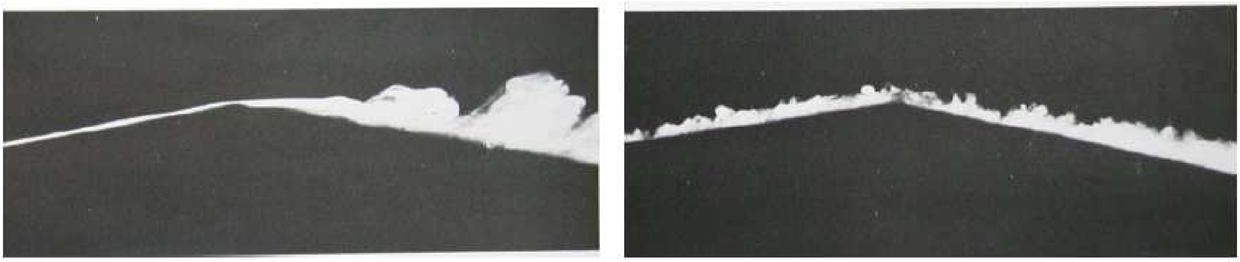
***Re < Re**$_{krit}$* – uspořádané laminární proudění

$\Rightarrow$ částice se nepohybují napříč průřezem

***Re > Re**$_{krit}$* – neuspořádané turbulentní proudění

$\Rightarrow$ nepravidelný/náhodný pohyb tekutiny ve všech směrech

$\Rightarrow$ pohyb částic kolmo ke stěně zvyšuje **tok hybnosti ke stěně** => pokles tlaku ve směru proudění mnohem větší než u laminárního proudění



srovnání laminární a turbulentní podvrstvy

Turbulentní proudění

Turbulence = náhodný pohyb částic tekutiny. Pohyb částic lze rozložit na:

- uspořádaný střední pohyb
- náhodné fluktuace

-vlivem fluktuací se může dostat molekula z oblasti <u>větší makroskopické rychlosti</u> do oblasti <u>menší makroskopické rychlosti</u>, tj. při nárazu na jinou molekulu se <u>zpomalí</u> a předá jí část své **hybnosti** (a naopak)

$\Rightarrow$ sdílení hybnosti mezi oblastmi tekutiny s rozličnou rychlostí

$\Rightarrow$ roste odpor proti proudění => roste <u>vnitřní tření tekutiny</u>

V tekutině tak definujeme:

Tečné napětí – vzniká:

- <u>vnitřním třením</u> v tekutině a <u>rychlostním gradientem</u> (lam. složka proudění – Newtonův z.)
- <u>změnou hybnosti</u> makroskopických částeček (následek jejich pronikání mezi sousední vrstvy)

$\Rightarrow$ **přídavné turbulentní napětí**

Turbulentní viskozita – má funkční závislost na:

- <u>stavu proudící tekutiny</u> - sdílení hybnosti fluktuacemi
- <u>poloze uvažovaného bodu</u> - odlehlost od stěny

Difúzní charakter turbulence - gradienty rychlosti vyvolané turb. fluktuacemi rychlostí jsou zdrojem:

- <u>vazkých napětí</u>
- <u>disipace energie</u>

$\Rightarrow$ vzrůst ***vnitřní energie*** tekutiny na úkor ***kinetické energie turbulence***

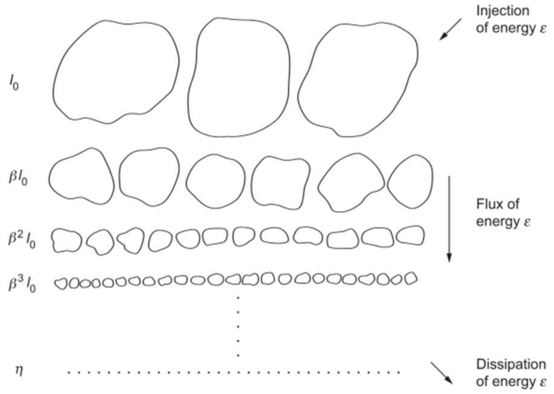
Teorie turbulence

Turbulentní proudění sestává z různě velikých prostorových struktur - **eddies** (**turbulentní víry**)

- velké víry obsahující energii se postupně rozpadají na menší víry
- kaskádní proces je ukončen disipací energie nejmenších vírů na teplo

- víry lze charakterizovat:
  - **makroměřítky**: charakteristickou délkou *l [m]*
    rychlostním měřítkem ***u*** *[m/s]*
  - **molekulárními vlastnostmi** – kinematická viskozita ν *[m²/s]* – způsobuje „vyhlazení“ rychlostních gradientů pomocí molekulární difúze

$\Rightarrow$ zavedení bezrozměrné veličiny *Re*



kaskáda vírových struktur

Teorie turbulence

Reynoldsovo číslo

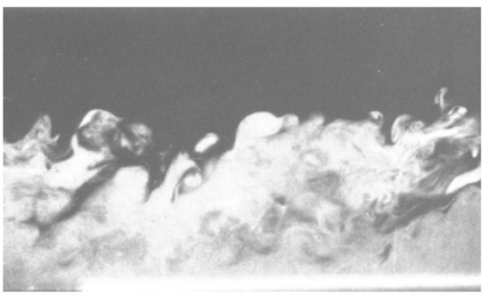
$$\mathrm{Re} = \frac{u \cdot l}{\nu}$$

důsledkem Reynoldsovy podobnosti je **disipace** (rychlost disipace) – ztráta kinetické energie vírů

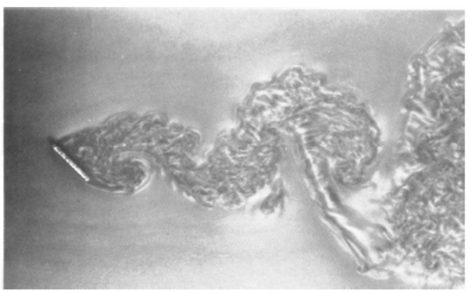
kinetická energie => teplo

Disipace ε *[m²/s³]*:

$$\varepsilon = \frac{u^3}{l}$$



mezní vrstva turbulence



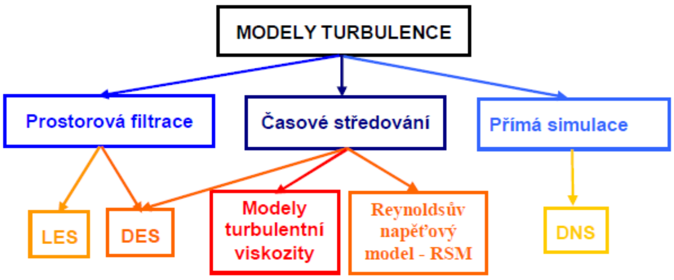
turbulentní vírová cesta za překážkou

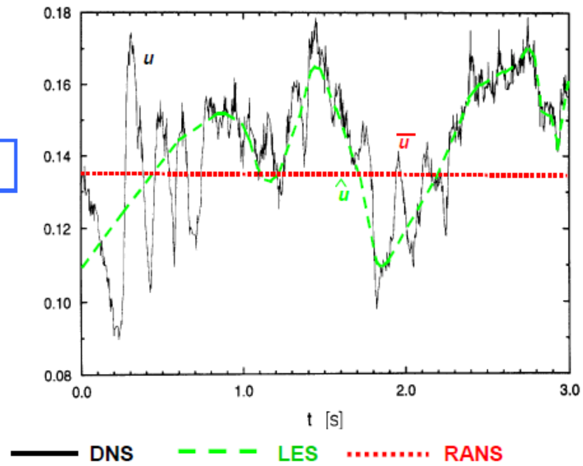
typické turbulentní struktury

Matematické modelování turbulentního proudění

Stále nedokážeme popsat vznik a chování turbulentních vírů přesně – numerická simulace dnes zná 3 základní přístupy vyplývající z určitých zjednodušení (modifikace výchozích rovnic popisujících proudění):

- **metoda přímé simulace** - **DNS** (Direct Numerical Simulation)
- **metoda velkých vírů** - **LES** (Large Eddy Simulation)
- **metoda časového středování** - **RANS** (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations)





metody modelování turbulence

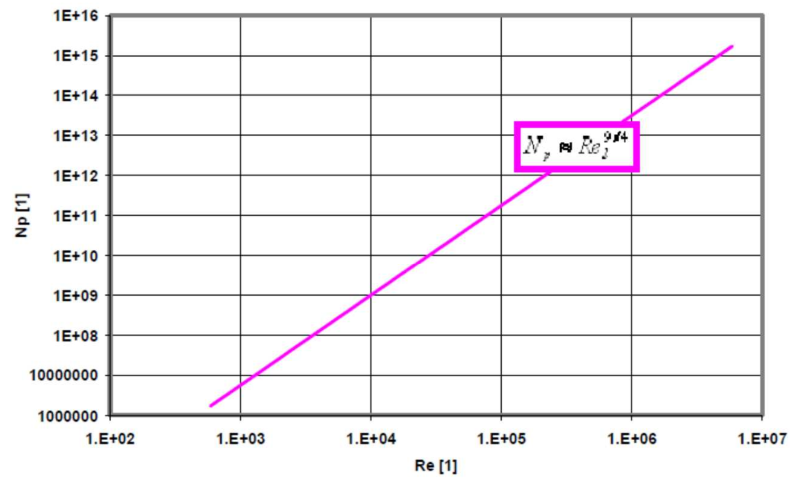
Matematické modelování turbulentního proudění

1. metoda přímé simulace

- velmi jemná síť, velmi velké výpočetní nároky
- velikost buněk lze řádově odhadnout z velikosti nejmenších vírů (tzv. Kolmogorovo mikroměřítko turbulence)

$$N_P \approx \mathrm{Re}_l^{9/4}$$

$\Rightarrow$ počet buněk prudce narůstá s velikostí *Re*



[Kozubková, 2008]

obr. 4.8 Odhad počtu uzlů sítě pro metodu DNS

Matematické modelování turbulentního proudění

2. metoda velkých vírů

- založena na <u>modelování velkých vírů</u>, jako prostorových časově závislých útvarů, které lze zachytit sítí
- víry malých měřítek se na transportních jevech podílí málo, ale jejich prostřednictvím dochází k <u>disipaci kinetické turbulentní energie</u> v důsledku viskozity <u>na teplo</u>
  - $\Rightarrow$ malé víry jsou parametrizovány tzv. **subgridními modely** a odstraněny pomocí <u>filtrace turbulentního pole</u>
  - $\Rightarrow$ je možné dosáhnout takový počet buněk sítě, který lze se současnou výpočetní technikou řešit

3. metoda časového středování (statistické modely turbulence)

- nejčastěji používaná, dostačující pro většinu inženýrských úloh
  - $\Rightarrow$ časové středování pomocí **Reynoldsovy rovnice**

Matematické modelování turbulentního proudění

Reynoldsova rovnice

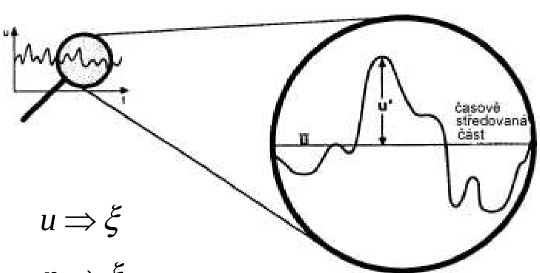
Turbulentní proudění – náhodný charakter, ale je <u>statisticky stabilní</u>

$\Rightarrow$ použití NS rovnic + statistické středování:

- rozložení okamžitých hodnot turbulentního proudění na
  - časově středovanou složku
  - fluktuační složku

Po dosazení středované a fluktuační složky do rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial(\overline{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{a po časovém středování:} \qquad \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_j} = 0$$



$u \Rightarrow \xi$

$p \Rightarrow \xi$

$$\zeta = \overline{\zeta} + \zeta'$$

kde

$$\overline{\zeta} = \frac{1}{T}\int_0^T \zeta \, d\tau \qquad \overline{\zeta'} = 0$$

resp. $\overline{\zeta} = \frac{1}{N}\sum_i \zeta_i$

fluktuace a časově středovaná část

Matematické modelování turbulentního proudění

- <u>Navier-Stokesova pohybová rovnice</u>

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\overline{\overline{\tau}}) + \rho \cdot \vec{g} + \vec{F}$$

zrychlení tekutiny (akumulace hybnosti)
konvektivní zrychlení (vtok-výtok)
gradient tlaku (zrychlení tlakovým spádem)
smykové napětí (viskozita)
gravitační síly
vnější objemové síly

p – statický tlak;

τ – tenzor smykových napětí, který se určí z:

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left[\left(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^{T} \right) - \frac{2}{3} \cdot \nabla \cdot (\vec{v} \cdot I) \right]$$

vliv objemové roztažnosti

μ – dynamická viskozita;

I – jednotkový tenzor.

Matematické modelování turbulentního proudění

Reynoldsova rovnice

po dosazení do NS rovnice ($f_i = \overline{\overline{f}}_i, \rho = \overline{\rho}$):

$$\frac{\partial(\overline{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_i + u'_i)(\overline{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\overline{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\overline{u}_i + u'_i)}{\partial x_j^2} + f_i$$

$\Rightarrow$ Reynoldsova rovnice – formálně podobná NS rovnici pro středované veličiny (s 1 členem navíc):

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u'_i u'_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu . \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} + f_i$$

$\Rightarrow$ pro fluktuační složky rychlosti:

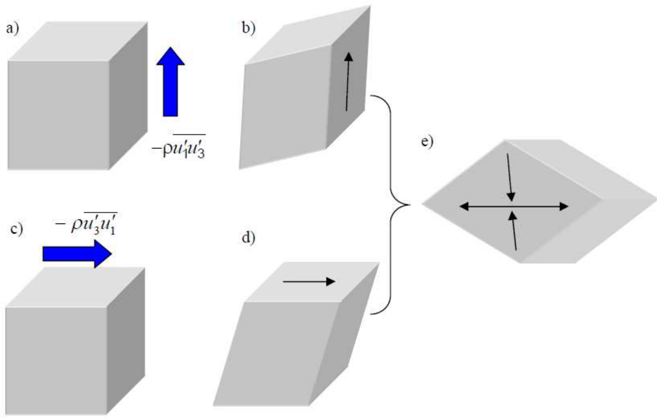
$$\frac{\partial(u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i u'_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i \overline{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(u'_i)}{\partial x_j^2} + f_i$$

$-\rho \overline{u'_i u'_j}$ - tzv. **Reynoldsova (turbulentní) napětí** – existují jen při turbulentním proudění

Matematické modelování turbulentního proudění

Reynoldsovo napětí

- tekutina o odlišné rychlosti obtéká jednu plochu a protilehlou plochu krychle neovlivňuje
  - ⇒ krychle se deformuje z důvodu odchylek rychlostí na těchto dvou plochách
  - ⇒ vznik toku hybnosti – dán rychlostí, kterou je tekutina o odlišné rychlosti transportována přes plochu krychle
- účinek toku hybnosti na krychli je shodný s účinkem síly na plochu krychle, která se deformuje
  - ⇒ turbulentní tok hybnosti působí jako napětí



deformační účinky Reynoldsových napětí

Matematické modelování turbulentního proudění

Boussinesquova hypotéza

- základem většiny matematických modelů turbulence je popis lokálního stavu turbulence **vírovou (turbulentní) viskozitou** pomocí rychlostního měřítka *u* a délkového měřítka *l*: $\mu_t \approx l \cdot u$

Předpoklad hypotézy: podobně jako při laminárním proudění, jsou turbulentní napětí a turbulentní toky úměrné gradientu střední rychlosti, teploty, koncentrace apod., tj.:

laminární proudění molekulová viskozita	Boussinesquova hypotéza (analogie)	turbulentní proudění vírová turbulentní viskozita
$\tau = \mu \frac{du}{dy}$	⟷	$\tau_t = -\rho\overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$

obecně: $$-\rho\overline{u_i'u_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

kde *k* – **turbulentní kinetická energie**: $k = \frac{1}{2}\overline{u_j'u_j'}$

Turbulentní viskozita – fyzikální vlastnost proudění (nikoli kapaliny)

- silně závislá na míře turbulence
- rovnice hybnosti s Boussinesquovou hypotézou (platí i pro přenos tepla a jiné skaláry):

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} + \nu_t \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} + f_i$$

Matematické modelování turbulentního proudění

Statistické modely turbulence

- Reynoldsova napětí jsou přítomna v rovnicích popisujících střední pohyb tekutiny
  - $\Rightarrow$ systém pohybových rovnic není uzavřen jako v případě laminárního proudění
  - $\Rightarrow$ nutné vytvořit soubor přídavných rovnic a empirických vztahů => **modely turbulence**

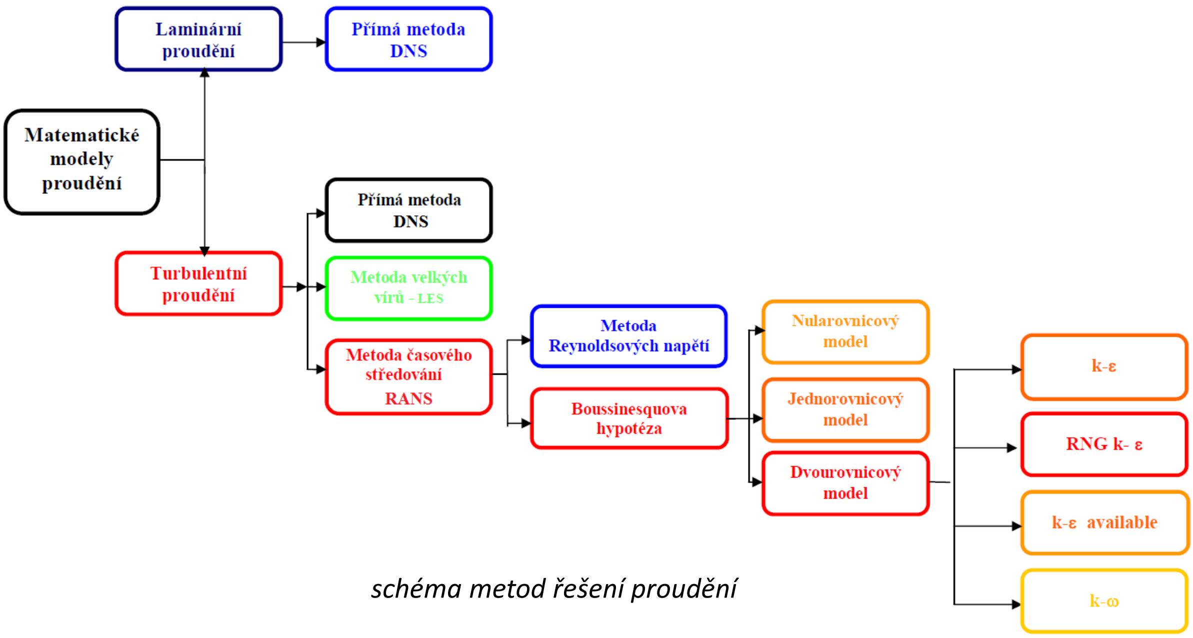


schéma metod řešení proudění

Matematické modelování turbulentního proudění

Nularovnícový model (model směšovací délky – Prandtl)

- jednoduchá závislost na <u>střední hodnotě rychlosti</u> a <u>směšovací délce</u> $\mu_t = f(\overline{u}, l_m)$
- vhodný pro modelování proudění ve smykové vrstvě
- předpokládá se <u>lokální rovnováha</u> (produkce k = disipaci ε) => <u>nepostihuje se transport turbulence</u>

Jednorovnicový model

- již zahrnuje diferenciální transportní rovnici – <u>postihuje transport turbulentních parametrů</u>
- transportní rovnice pro rychlostní měřítko turbulentního pohybu $\sqrt{k}$ a tedy $\mu_t = f(k, l)$

Dvourovnicové modely

k-ε – turbulentní viskozita určena pomocí 2 transportních rovnic – pro ***k*** a ***ε***

- využívá Boussinesquovy hypotézy o vírové viskozitě $\mu_t = f(k, \varepsilon) = C_v \dfrac{k^2}{\varepsilon}$

RNG k-ε – odvozen z klasického modelu ***k-ε*** při využití matematického postupu <u>metoda renormalizačních grup</u> (RNG)

k-ω – rychlost disipace ***k*** (tj. *ε*) nahrazen specifickou rychlostí disipace ***k*** ($\omega = \varepsilon / k$)

…

Vícerovnicové modely

RSM (Reynoldsův napěťový model) – nevyužívá Bouss. hypotézy, ale zahrnuje výpočet jednotlivých <u>Reynoldsových napětí</u> pomocí 6-ti diferenciálních transportních rovnic

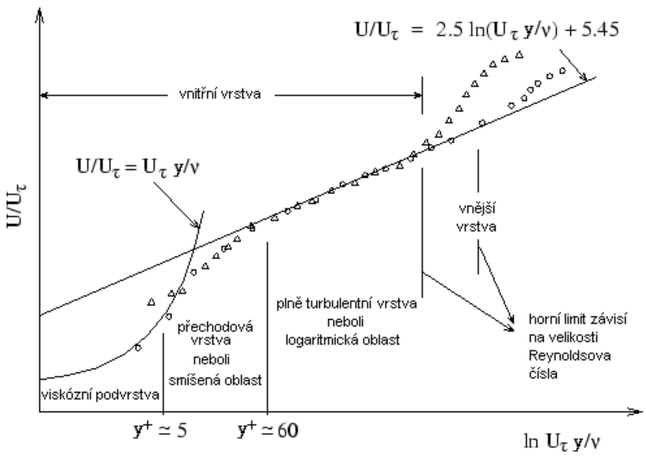
Matematické modelování turbulentního proudění

Modelování proudění v blízkosti stěny

V blízkosti stěny se řešené veličiny rychle mění – výrazně se zde uplatňuje přenos hybnosti a skalárních veličin

$\Rightarrow$ kvalita popisu ovlivňuje přesnost numerického řešení v celé řešené oblasti

- v oblasti u stěny vzniká tzv. **mezní vrstva**, kterou lze rozdělit:
  - <u>viskózní podvrstva</u> - nachází se bezprostředně u stěny, proudění je zde téměř laminární a molekulární viskozita má dominantní vliv na přenos hybnosti, tepla a hmotnosti
  - <u>přechodová vrstva</u> - mezi laminární podvrstvou a plně turbulentní vrstvou
    - uplatňují se zde stejnou měrou účinky jak molekulární viskozity, tak turbulence
  - <u>plně turbulentní vrstva</u> - vnější část mezní vrstvy, dominantní úlohu zde hraje turbulence



rozdělení oblasti v blízkosti stěny

Matematické modelování turbulentního proudění

Modelování proudění v blízkosti stěny

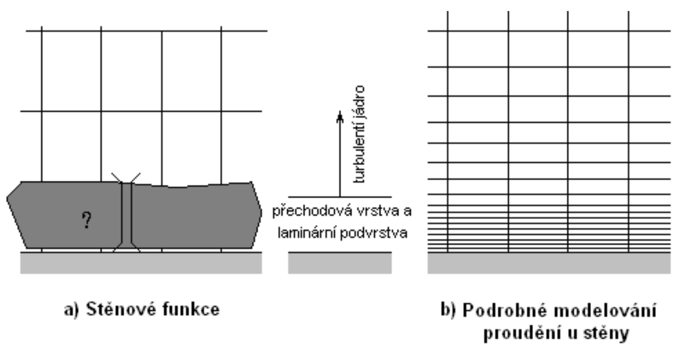
lze využít dva základní přístupy:
- *stěnové funkce*
- *podrobné modelování proudění u stěny*

Stěnové funkce

soubor poloempirických vztahů - pro řešenou veličinu přemosťují vzdálenost mezi stěnou a buňkou v blízkosti stěny

$\Rightarrow$ <u>překlenutí</u> oblasti viskózní podvrstvy a přechodové vrstvy, kde se uplatňuje molekulární i turbulentní viskozita

- značně snižuje nároky na jemnost sítě u stěny a přitom poskytuje dostatečně přesné řešení pro většinu inženýrských problémů
- dělí se na:
  - standardní stěnové funkce
  - nerovnovážné stěnové funkce
  - pokročilé stěnové funkce



základní přístupy pro modelování proudění v blízkosti stěny

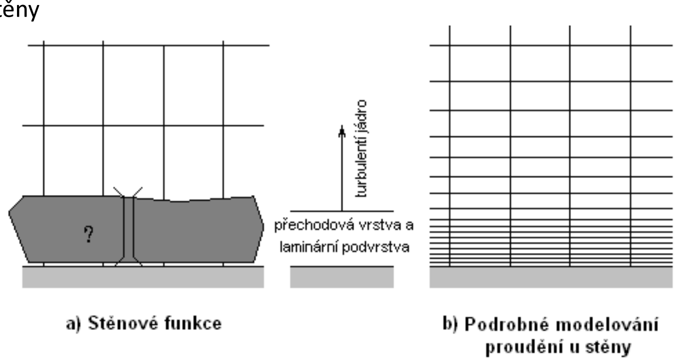
Matematické modelování turbulentního proudění

Modelování proudění v blízkosti stěny

Podrobné modelování proudění u stěny

Jedná se o detailní popis proudění u stěny včetně vazké podvrstvy

- celá oblast je rozdělena na část, ve které se projevuje vliv viskozity a na plně turbulentní oblast
- hranice mezi oběma oblastmi je definována pomocí turbulentního Reynoldsova čísla
- vhodné tam, kde selhávají stěnové funkce - případy, kde se proudění příliš liší od ideálních předpokladů, na nichž je metoda stěnové funkce založena, například:
    - proudění s nízkým Reynoldsovým číslem
    - velký vliv stěny
    - silný tlakový gradient vedoucí k odtržení mezní vrstvy
    - působení velkých objemových sil
    - trojrozměrné proudění v blízkosti stěny



základní přístupy pro modelování proudění v blízkosti stěny

Literatura

[Kozubková, 2008] Kozubková, M.: Modelování proudění tekutin. VŠB-TU Ostrava, Ostrava, 2008

[Fluent, 2011] ANSYS FLUENT Theory Guide, Release 14.0. ANSYS, Inc., November 2011