# 2 Vedení tepla v palivových elementech

V předchozích odstavcích jsme se zajímali o vývin tepla jako takový a je vidět že většina tepla (~ 95%) je generována v palivových elementech.

Odvod tepla z paliva:

- vlastním palivem
- mezerou
- povlakem
- chladivem

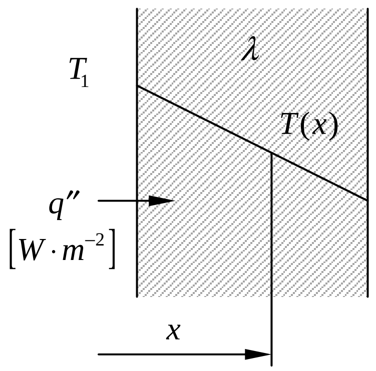
uplatňují se všechny formy sdílení tepla – vedení, záření, konvektivní a konduktivní přestup. K popisu rozložení teplot v nepohyblivém prostředí s vnitřními tepelnými zdroji je diferenciální rovnice – rovnice vedení tepla.

## 2.1 Stacionární vedení tepla

### *Rovnice vedení tepla*

Rovnice vedení tepla je matematickou formulací zákona zachování energie. K jejímu popisu používáme Fourierova zákona.

**Fourierův zákon**




Tepelný tok, který v tuhém tělese přejde za jednotku času jednotkovou plochu kolmou na směr tepelného toku, je úměrný zápornému gradientu teploty:

$$q'' = -\lambda \cdot grad\ T$$

kde $\lambda$ je součinitel tepelné vodivosti $\left[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}\right]$, obvykle je fcí teploty. Celkové množství tepla, které projde za jednotku času plochou S kolmou na hustotu tepelného toku $q''$, je

$$\dot{Q} = \int_S q''\, dS = -\int_S \lambda \cdot grad\ T\, dS \qquad [W]$$

**Obecná diferenciální rovnice vedení tepla**

Ze zákona o zachování energie můžeme sestavit rovnici tepelné bilance v prostředí o objemu *V* ohraničené povrchem *S*:

$$\begin{bmatrix} změna\ vnitřní \\ energie\ za\ jednotku \\ času \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} výsledný\ přenos \\ tepla\ vedením \\ za\ jednotku\ času \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} výkon\ tepelných \\ zdrojů \end{bmatrix}$$

Matematická forma zákona zachování energie:

$$\int_V \frac{\partial(\rho \cdot c \cdot T)}{\partial \tau} dV - \int_S \lambda \cdot gradT\, dS = \int_V q''' dV$$

kde $q'''\left[W \cdot m^{-3}\right]$ je objemový zdroj tepla

Z Gauss - Ostrogradského věty dostaneme diferenciální rovnici vedení tepla s matematickým popisem časové změny teploty v libovolném místě tělesa vyvolané výsledným přenosem tepla vedením a působením tepelných zdrojů:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \cdot c \cdot T)}{\partial \tau} = div(\lambda \cdot gradT) + q'''}$$

kde pro stacionární stav platí, že levá strana rovnice je rovna nule.

**Rovnice vedení tepla v diferenciálním tvaru**

Pro $\rho, c, \lambda = konst.$ získáme nestacionární tvar:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \nabla^2 T + \frac{q'''}{\rho \cdot c}}$$

kde $a = \dfrac{\lambda}{\rho \cdot c}$ je součinitel teplotní vodivosti. Opět, pro $\dfrac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ platí pro stacionární stav.

Pro tuto rovnici je nutno znát počáteční a okrajové podmínky.

----------------------

Pozn:

- divergencí vektoru T se nazývá skalár: $div\vec{T} = \nabla \vec{T} = \dfrac{\partial T_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_3}{\partial z}$
- kde Hamiltonův operátor nabla: $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$
- gradientem skalárního pole T=f(x,y,z) se nazývá vektor:

$$gradT = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$

- Laplaceův operátor Δ získáme skalárním násobením operátoru nabla sebou samým:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

----------------------

*počáteční podmínky*

počáteční rozložení teplot v tělese:

$$T(\vec{r}, \tau_0) = f(\vec{r})$$

*okrajové podmínky*

a) na povrchu těles známe rozložení teplot

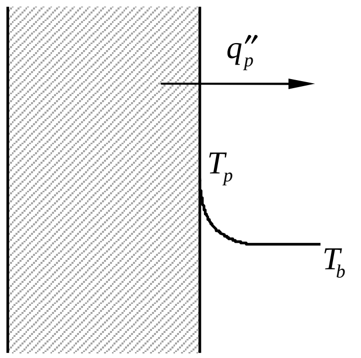
$$T_p(\tau) = f(\tau)$$

b) na povrchu těles známe rozložení tepelných toků

$$q''_p(\tau) = f(\tau)$$

c) povrch tělesa je obklopen prostředím o dané teplotě $T_b$

$T_b$ - střední objemová teplota média (bulk temperature). K popisu konvektivního přestupu tepla se používá *Newtonova zákona*:

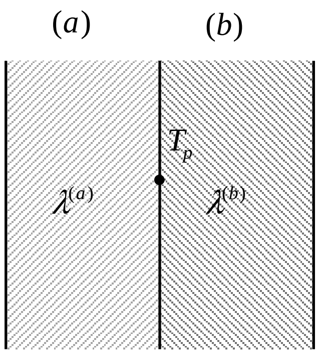



$$q_p'' = \alpha \cdot \left[ T_p(\tau) - T_b(\tau) \right]$$

$$\Rightarrow -\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \alpha \cdot \left[ T_p(\tau) - T_b(\tau) \right]$$

kde $\alpha \left[ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1} \right]$ je součinitel přestupu tepla.

d) na hranici dvou těles




Pro hranici dvou těles *(a)* a *(b)* s dokonalým tepelným stykem platí rovnost teplot a hustot tepelných toků:

$$T_p^{(a)}(\tau) = T_p^{(b)}(\tau)$$

$$\lambda^{(a)} \cdot \left( \frac{\partial T^{(a)}}{\partial n} \right)_p = \lambda^{(b)} \cdot \left( \frac{\partial T^{(b)}}{\partial n} \right)_p$$

Výsledek řešení rovnice vedení tepla: $T(\vec{r}, \tau) = f(\vec{r}, \tau) = ?$

**Rovnice vedení tepla ve válcové geometrii**

Dále se budeme zabývat válcovou geometrií, protože ta je nejčastějším případem.

$\dfrac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ pro stacionární stav,

<u>*Konstantní tepelná vodivost*</u>

předpokládejme $\lambda = konst.$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} + \frac{q'''}{\lambda} = 0$$

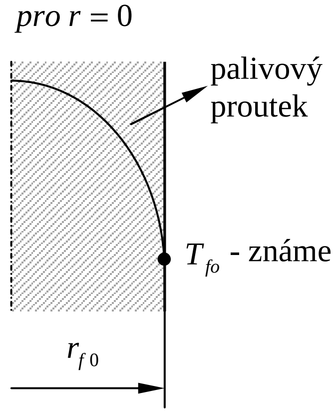
lze též přepsat do tvaru:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{q'''}{\lambda}$$

není – li $\lambda = konst.$ (to platí i pro paliva $UO_2$), pak

$$\left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( \lambda \cdot r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = -q''' \right]$$

Po úpravě…




$$T(r) = T_{Fo} - \frac{q'''}{4 \cdot \lambda} \cdot (r_{Fo}^2 - r^2)$$

$$T(r) - T_{Fo} = \frac{q'}{4 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_{Fo}^2}\right)$$

platí zde:

$$q''' \cdot \pi \cdot r_{Fo}^2 = q' \Rightarrow q''' = \frac{q'}{\pi \cdot r_{Fo}^2}$$

kde $q'$ je lineární výkon palivového proutku.

*Proměnná tepelná vodivost*

Při $\lambda \neq konst.$ je pro plný válcový element s objemovým vývinem tepla $q'''$. V jednorozměrném případě dostáváme rovnici:

$$\frac{1}{2} \cdot q''' \cdot r \cdot dr = -\lambda(T) \cdot dT$$

při zanedbání vlivu radiální závislosti objemového vývinu tepla a po zavedení integrální tepelné vodivosti:

$$\vartheta(T) = \int_0^T \lambda(T')dT'$$

$$\vartheta(T) - \vartheta(T') = \frac{q'}{4 \cdot \pi} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_{Fo}^2}\right)$$

Maximální teplota v ose palivového proutku ($r=0$):

$$(\vartheta_0 - \vartheta_{Fo}) = \int_{T_{Fo}}^{T_0} \lambda(T')dT' = \frac{q'}{4 \cdot \pi}$$

je tedy nezávislá na poloměru $r$, ale $q''' \downarrow$ pro $r \uparrow$.